Méth. Mat. Phys. - Chapitre 1

Fonctions de Green

- **Définition formelle :** distribution de Dirac

$$\delta\left(x\right) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

- **Condition de normalisation :** distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x\right)\, dx = 1 \tag{1.2}$$

- **Limites :** plus intuitives

  1. **Suite de fonctions delta gaussiennes :** $\sigma^2 = \frac{1}{n^2}$

$$\delta\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} \delta_n\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\,\frac{1}{2}\,n^2x^2} \tag{1.3}$$

  2. **Suite de fonctions delta sinus cardinals :**

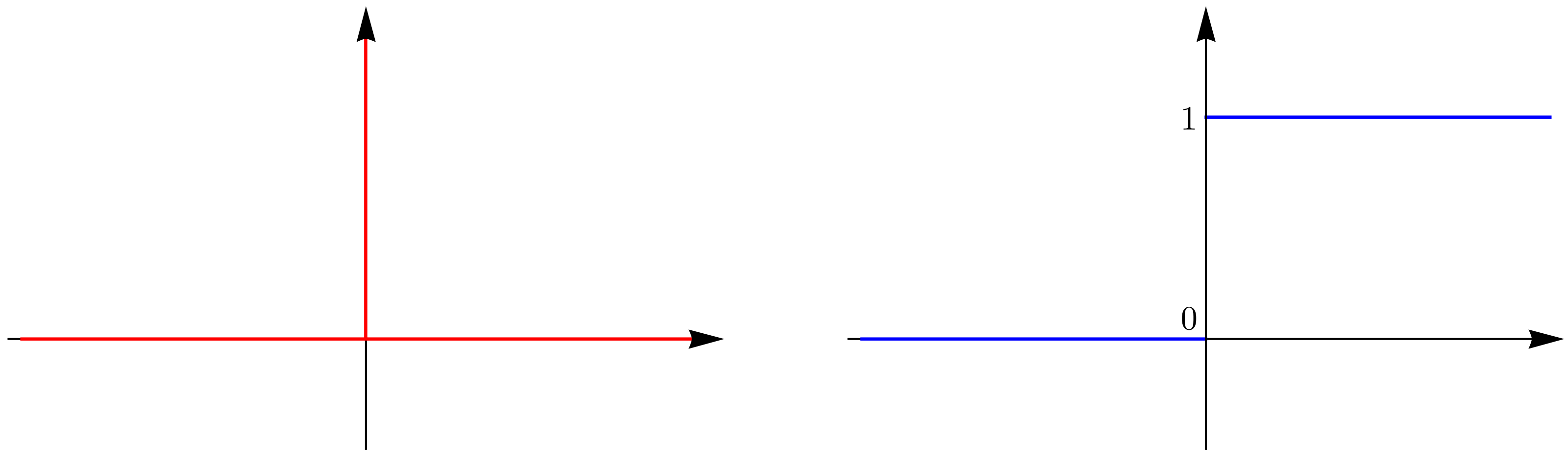
$$\delta\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} \delta_n\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(nx\right)}{\pi x} \tag{1.4}$$

1.1 Distribution de Dirac

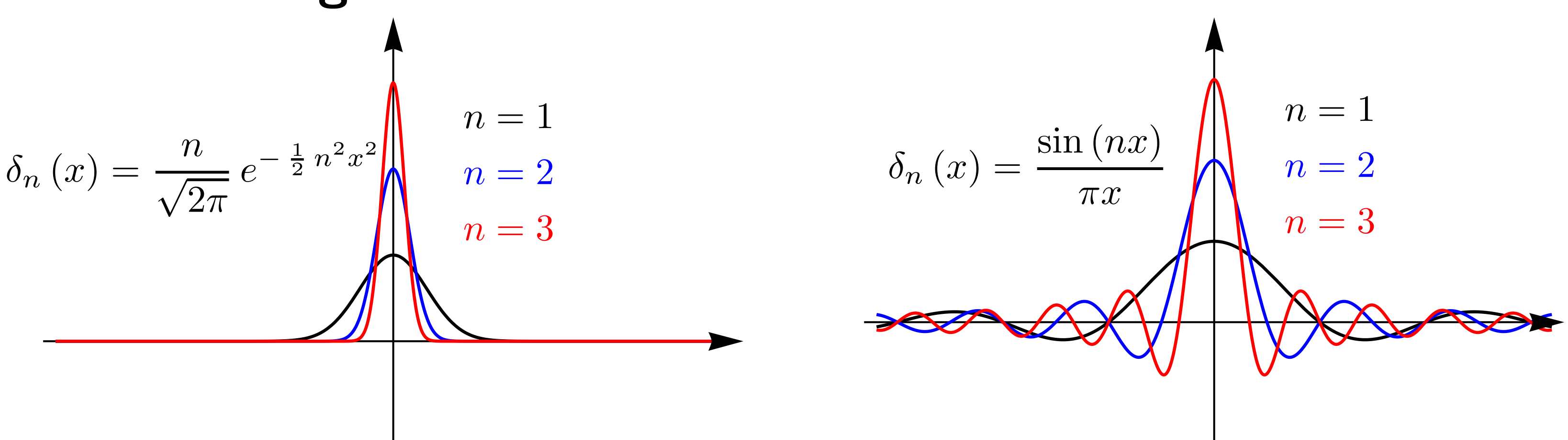
- **Fonction de Heaviside :** intégrale de la distribution de Dirac

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')\, dx' = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

- **Distribution de Dirac et fonction de Heaviside :**



- **Fonction delta gaussienne et fonction delta sinus cardinal :**



- **Propriétés :** distribution de Dirac

1. **Translation :** $1D$

$$\delta\left(x - x'\right) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x = x' \\ 0 & \text{si} \quad x \neq x' \end{cases} \tag{1.6}$$

2. **Intégrale d'une fonction :** $1D$ - unité $\left[x^{-1}\right]$ et $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$f\left(x\right) = f\left(x\right)\int_{a}^{b} \delta\left(x - x'\right) dx' = \int_{a}^{b} f\left(x'\right) \delta\left(x - x'\right) dx' \tag{1.7}$$

3. **Translation :** $3D$ - représentation cartésienne

$$\delta^{3}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) = \delta\left(x - x'\right)\delta\left(y - y'\right)\delta\left(z - z'\right) \tag{1.8}$$

4. **Intégrale d'une fonction :** $3D$ - unité $\left[r^{-3}\right]$ et $\boldsymbol{r} \in V \subset \mathbb{R}^{3}$

$$f\left(\boldsymbol{r}\right) = f\left(\boldsymbol{r}\right)\iiint_{V} \delta^{3}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) d^{3}r' = \iiint_{V} f\left(\boldsymbol{r}'\right)\delta^{3}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) d^{3}r' \tag{1.10}$$

- **Condition de normalisation :** distribution de Dirac

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta^3\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) d^3r \tag{1.9}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - x'\right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(y - y'\right) dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(z - z'\right) dz = 1$$

- **Equation différentielle :** 1D - opérateur linéaire inversible $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\, g\left(x\right) = f\left(x\right) \quad \text{où} \quad x \in [a, b] \tag{1.11}$$

- **Equation différentielle :** fonction de Green

$$\mathcal{L}\, G\left(x - x'\right) = \delta\left(x - x'\right) \tag{1.14}$$

- **Solution :** produit de convolution : intégrale de la fonction de Green

$$g\left(x\right) = \mathcal{L}^{-1} f\left(x\right) = \left(G * f\right)\left(x\right) = \int_a^b G\left(x - x'\right) f\left(x'\right) dx' \tag{1.15}$$

- **Démonstration :** (1.7), (1.14) et (1.15) donne $(1.16) \equiv (1.11)$

$$\mathcal{L}\, g\left(x\right) = \int_a^b \mathcal{L}\, G\left(x - x'\right) f\left(x'\right) dx' = \int_a^b f\left(x'\right) \delta\left(x - x'\right) dx' = f\left(x\right) \;\square$$

- **Equation différentielle :** 3D - opérateur linéaire inversible $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\, g\left(\boldsymbol{r}\right) = f\left(\boldsymbol{r}\right) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{r} \in V \tag{1.17}$$

- **Equation de Green :** fonction de Green

$$\mathcal{L}\, G\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) = \delta^{3}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) \tag{1.18}$$

- **Solution :** intégrale de la fonction de Green - superposition de sol. part.

$$g\left(\boldsymbol{r}\right) = \mathcal{L}^{-1} f\left(\boldsymbol{r}\right) = \left(G * f\right)\left(\boldsymbol{r}\right) = \iiint_V G\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) f\left(\boldsymbol{r}'\right) d^3r' \tag{1.19}$$

- **Démonstration :** (1.16), (1.15) et (1.9)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\, g\left(\boldsymbol{r}\right) &= \iiint_V \mathcal{L}\, G\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) f\left(\boldsymbol{r}'\right) d^3r' = \iiint_V f\left(\boldsymbol{r}'\right) \delta^{3}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) d^3r' \\ &= f\left(\boldsymbol{r}\right) \quad \square \end{aligned} \tag{1.20}$$

1. **Equation de Green spatiale :** 1D

$$\mathcal{L}\, G\,(x - x') = \delta\,(x - x') \tag{1.21}$$

2. **Equation de Green spatiale :** 3D

$$\mathcal{L}\, G\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \delta^3\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{1.22}$$

3. **Equation de Green temporelle :** 1D

$$\mathcal{L}\, G\,(t - t') = \delta\,(t - t') \tag{1.23}$$

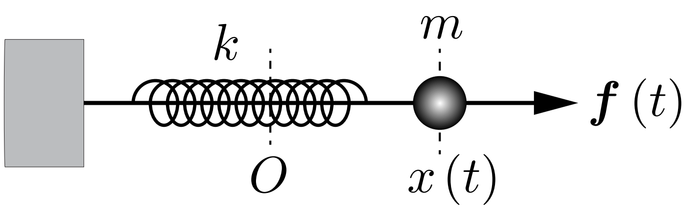
4. **Equation de Green spatio-temporelle :** 2D

$$\mathcal{L}\, G\,(x - x', t - t') = \delta\,(x - x')\,\delta\,(t - t') \tag{1.24}$$

5. **Equation de Green spatio-temporelle :** 4D

$$\mathcal{L}\, G\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') = \delta^3\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\delta\,(t - t') \tag{1.25}$$

- **Oscillateur harmonique forcé :**
  - masse : m
  - pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \qquad (1.28)$



- **Equation du mouvement :** déformation $x(t)$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = \frac{1}{m}\, f(t) \qquad (1.27)$$

- **Force ponctuelle :** au temps $t = t'$

$$f(t) = m\, v_0\, \delta(t - t') \quad \text{où} \quad v_0 = \text{cste} \qquad (1.29)$$

- **Solution ponctuelle :** déformation où $f(t) = 0$ si $t < t'$ et $t > t'$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < t' \\ A(t')\, e^{\,i\,\omega_0 t} + B(t')\, e^{-i\,\omega_0 t} & \text{si} \quad t > t' \end{cases} \qquad (1.30)$$

- **Intégrale du mouvement :** $t \in [\,t' - \varepsilon, t' + \varepsilon\,]$ divisée par m (1.8)

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \Big(\ddot{x}\,(t) + \omega_0^2\,x\,(t)\Big)\,dt = v_0 \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta\,(t - t')\,dt = v_0 \tag{1.32}$$

  - **Continuité de la déformation :**

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \omega_0^2\,x\,(t)\,dt = 0 \tag{1.33}$$

  - **Discontinuité de la vitesse de déformation :**

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \ddot{x}\,(t)\,dt = v_0 \tag{1.34}$$

- **Intégrale du mouvement :** limite $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\dot{x}\,(t' + \varepsilon) - \dot{x}\,(t' - \varepsilon)\Big) = v_0 \tag{1.35}$$

- **Conditions initiales sur la position et la vitesse :** lorsque $t = t'$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x\,(t' - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} x\,(t' + \varepsilon) = 0 \tag{1.36}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \dot{x}\,(t' - \varepsilon) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \dot{x}\,(t' + \varepsilon) = v_0 \tag{1.37}$$

- **Déformation initiale :** (1.30)

$$x\left(t'\right) = A\left(t'\right) e^{\,i\,\omega_0 t'} + B\left(t'\right) e^{-i\,\omega_0 t'} = \lim_{\varepsilon \to 0} x\left(t' + \varepsilon\right) = 0 \tag{1.38}$$

- **Vitesse de déformation initiale :** dérivée temporelle de (1.30)

$$\dot{x}\left(t'\right) = i\,\omega_0 \left(A\left(t'\right) e^{\,i\,\omega_0 t'} - B\left(t'\right) e^{-i\,\omega_0 t'}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dot{x}\left(t' + \varepsilon\right) = v_0 \tag{1.39}$$

- **Coefficients :** (1.38) et (1.39)

$$A\left(t'\right) = \frac{v_0}{2i\,\omega_0}\, e^{-\,i\,\omega_0 t'} \qquad \text{et} \qquad B\left(t'\right) = -\,\frac{v_0}{2i\,\omega_0}\, e^{i\,\omega_0 t'} \tag{1.40}$$

- **Déformation :** force ponctuelle (1.31), (1.22) et (1.5) si $t > t'$

$$x\left(t\right) = \frac{v_0}{\omega_0}\,\sin\left(\omega_0\left(t - t'\right)\right)\Theta\left(t - t'\right) \tag{1.41}$$

où la fonction de Heaviside $\Theta\left(t - t'\right)$ assure la causalité.

- **Force ponctuelle :** au temps $t = t'$

$$f(t) = m\, v_0\, \delta(t - t') \tag{1.29}$$

- **Déformation :** force ponctuelle

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin\Big(\omega_0 (t - t')\Big)\, \Theta(t - t') \tag{1.41}$$

- **Equation du mouvement :** (1.27) force ponctuelle (1.29)

$$\mathcal{L}\, x(t) = v_0\, \delta(t - t') \tag{1.44}$$

- **Equation de Green :** (1.14)

$$\mathcal{L}\, G(t - t') = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) G(t - t') = \delta(t - t') \tag{1.45}$$

- **Fonction de Green temporelle :** force ponctuelle $(1.41) - (1.45)$

$$G(t - t') = \frac{x(t)}{v_0} = \frac{1}{\omega_0} \sin\Big(\omega_0 (t - t')\Big)\, \Theta(t - t') \tag{1.46}$$

- **Déformation :** force générale : produit de convolution (1.15)

$$x\left(t\right)=\frac{1}{m}\left(G*f\right)\left(t\right)=\frac{1}{m}\int_{0}^{t}G\left(t-t'\right)\,f\left(t'\right)\,dt' \tag{1.47}$$

- **Démonstration :** déformation force générale

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,x\left(t\right)&=\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)x\left(t\right)=\frac{1}{m}\int_{0}^{t}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)G\left(t-t'\right)f\left(t'\right)dt'\\&=\frac{1}{m}\int_{0}^{t}\delta\left(t-t'\right)f\left(t'\right)dt'=\frac{1}{m}\,f\left(t\right)\qquad\square\end{aligned} \tag{1.48}$$

- **Fonction de Green temporelle :** causalité : $\Theta\left(t-t'\right)$

$$G\left(t-t'\right)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad t<t'\\ \dfrac{1}{\omega_0}\sin\Big(\omega_0\left(t-t'\right)\Big) & \text{si}\quad t>t'\end{cases} \tag{1.49}$$

- **Déformation :** solution force générale (causalité)

$$x\left(t\right)=\frac{1}{m\,\omega_0}\int_{0}^{t}\sin\Big(\omega_0\left(t-t'\right)\Big)\,f\left(t'\right)\,dt' \tag{1.50}$$

- **Force périodique :**

$$f\left(t'\right) = f_0\,\sin\left(\omega\,t'\right) = m\,a_0\,\sin\left(\omega\,t'\right) = m\,a_0\,\frac{e^{\,i\,\omega\,t'} - e^{-\,i\,\omega\,t'}}{2\,i} \tag{1.51}$$

- **Déformation :** force périodique (1.51) dans (1.50)

$$\begin{aligned}
x\left(t\right) &= \frac{a_0}{\omega_0}\int_0^t\left(\frac{e^{\,i\,\omega_0\left(t-\,t'\right)} - e^{-\,i\,\omega_0\left(t-\,t'\right)}}{2\,i}\right)\left(\frac{e^{\,i\,\omega\,t'} - e^{-\,i\,\omega\,t'}}{2\,i}\right)dt' \\
&= -\,\frac{a_0\,e^{\,i\,\omega_0 t}}{4\,\omega_0}\int_0^t\left(e^{\,i\,(\omega-\,\omega_0)t'} - e^{-\,i\,(\omega+\omega_0)t'}\right)\,dt' \\
&\quad -\,\frac{a_0\,e^{-\,i\,\omega_0 t}}{4\,\omega_0}\int_0^t\left(e^{-\,i\,(\omega-\,\omega_0)t'} - e^{\,i\,(\omega+\omega_0)t'}\right)\,dt' \qquad (1.52) \\
&= \frac{a_0}{4\,\omega_0}\,e^{\,i\,\omega_0 t}\int_0^t\left(e^{-\,i\,(\omega+\omega_0)t'} - e^{\,i\,(\omega-\,\omega_0)t'}\right)\,dt' \\
&\quad +\,\frac{a_0}{4\,\omega_0}\left(e^{\,i\,\omega_0 t}\int_0^t\left(e^{-\,i\,(\omega+\omega_0)t'} - e^{\,i\,(\omega-\,\omega_0)t'}\right)\,dt'\right)^*
\end{aligned}$$

- **Déformation :** force périodique

$$x\left(t\right) = \frac{a_0}{2\,\omega_0}\ \mathrm{Re}\left(e^{\,i\,\omega_0 t}\int_0^t \left(e^{-\,i\,(\omega+\omega_0)t'} - \,e^{\,i\,(\omega-\,\omega_0)t'}\right)\,dt'\right) \tag{1.53}$$

- **Intégrale :**

$$\int_0^t \left(e^{-\,i\,(\omega+\omega_0)t'} - \,e^{\,i\,(\omega-\,\omega_0)t'}\right)\,dt' = \left.\frac{e^{-\,i\,(\omega+\omega_0)t'}}{-\,i\,\left(\omega+\omega_0\right)}\right|_0^t - \left.\frac{e^{\,i\,(\omega-\,\omega_0)t'}}{i\,\left(\omega-\,\omega_0\right)}\right|_0^t$$

$$= i\left(\frac{e^{-\,i\,(\omega+\omega_0)t} - \,1}{\omega+\omega_0}\right) + i\left(\frac{e^{\,i\,(\omega-\,\omega_0)t} - \,1}{\omega-\,\omega_0}\right) \tag{1.54}$$

- **Déformation :** force périodique : $\mathrm{Re}\left(i\,e^{\,\pm\,i\,\omega_* t}\right) = \mp\,\sin\left(\omega_* t\right)$ (1.56)

$$x\left(t\right) = \frac{a_0}{2\,\omega_0}\ \mathrm{Re}\left(i\left(\frac{e^{-\,i\,\omega\,t} - \,e^{\,i\,\omega_0 t}}{\omega+\omega_0}\right) + i\left(\frac{e^{\,i\,\omega\,t} - \,e^{\,i\,\omega_0 t}}{\omega-\,\omega_0}\right)\right) \tag{1.55}$$

$$x\left(t\right) = \frac{a_0}{2\,\omega_0}\left(\frac{\sin\left(\omega\,t\right)+\sin\left(\omega_0\,t\right)}{\omega+\omega_0} - \frac{\sin\left(\omega\,t\right)-\,\sin\left(\omega_0\,t\right)}{\omega-\,\omega_0}\right) \tag{1.57}$$

1. **Repos :** déformation nulle

$$\lim_{\omega \to 0} x\left(t\right) = 0 \tag{1.58}$$

2. **Pulsations voisines :** $\omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$

$$x\left(t\right) \simeq -\frac{a_0}{2\,\omega_0}\,\frac{\sin\left(\omega\,t\right) - \sin\left(\omega_0\,t\right)}{\omega - \omega_0} \tag{1.59}$$

- **Formule de trigonométrie :**

$$\sin\left(\omega\,t\right) - \sin\left(\omega_0\,t\right) = \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\,t\right) \tag{1.60}$$

- **Battements :** pulsations lente $\left(\omega - \omega_0\right)/2$ et rapide $\left(\omega + \omega_0\right)/2$

$$x\left(t\right) \simeq -\frac{a_0}{2\,\omega_0\left(\omega - \omega_0\right)}\;\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\,t\right) \tag{1.61}$$

- **Battements :** enveloppe lente $(\omega - \omega_0)/2$ et oscillations internes rapides $(\omega + \omega_0)/2$

$$x(t) \simeq -\frac{a_0}{2\,\omega_0\,(\omega - \omega_0)}\;\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\,t\right) \tag{1.61}$$